第３講　場合の数と確率

1　つぼの中に 6 個の赤玉と 4 個の白玉の合計 10 個の玉が入っている。このつぼから，玉を 1 個ずつ 10 回続けて取り出す。ただし，一度取り出した玉はもとに戻さないものとする。

(1)　1 回目と 2 回目に連続して赤玉が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2)　i を 2 から 9 までの整数とし，i 回目と $(i+1)$ 回目に連続して赤玉が取り出される確率 p_i を考える。同じ色の玉は区別しない場合，10 個すべての玉の取り出し方は，取り出した玉を 1 列に並べる並べ方の総数に等しく，$\boxed{ウエオ}$ 通りである。それらのうち，8 回目の取り出しを終えた時点で白玉がすべて取り出されている取り出し方は $\boxed{カキ}$ 通りである。よって，p_9 の値は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。また，p_3 の値は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

(3)　4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 2 個以上取り出されている確率は $\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セソ}}$ である。よって，4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 2 個以上取り出されていたとき，1 回目と 2 回目に連続して赤玉が取り出されている条件付き確率は $\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}$ である。

（次ページに続く。）

⑷　4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 2 個以上取り出されていたとき，9 回目と10 回目に連続して赤玉が取り出される条件付き確率は $\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニヌネ}}$ である。

⑸　つぼからまず 3 個の玉を同時に取り出して，玉の色は確認せずに印をつけてつぼに戻したのち，改めて玉を 1 個ずつ 10 回続けて取り出す。一度取り出した玉はもとに戻さない。9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハヒ}}$ である。

2　二つの袋 A，B と一つの箱がある。A の袋には赤球 2 個と白球 1 個が入っており，B の袋には赤球 3 個と白球 1 個が入っている。また，箱には何も入っていない。

(1)　A，B の袋から球をそれぞれ 1 個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i)　箱の中の 2 個の球のうち少なくとも 1 個が赤球である確率は $\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である。

(ii)　箱の中をよくかき混ぜてから球を 1 個取り出すとき，取り出した球が赤球である確率は $\frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ であり，取り出した球が赤球であったときに，それが B の袋に入っていたものである条件付き確率は $\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$ である。

（次ページに続く。）

(2)　A，B の袋から球をそれぞれ 2 個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i)　箱の中の 4 個の球のうち，ちょうど 2 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また，箱の中の 4 個の球のうち，ちょうど 3 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(ii)　箱の中をよくかき混ぜてから球を 2 個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。また，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であったときに，それらのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

第３講　場合の数と確率

1 (1)　1 回目と 2 回目に連続して赤玉が取り出される確率は

$$\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$

(2)　同じ色の玉は区別しない場合，10 個の玉の取り出し方は，10 個の玉を 1 列に並べる並べ方の総数と等しく

$$\frac{10!}{6!4!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6!}{6!4!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210\ (\text{通り})$$

これは，1 回目から 10 回目のうち白玉が取り出される 4 回を選ぶ ${}_{10}C_4$ 通りと同じであり，残りの 6 回は赤玉である（${}_6C_6=1$ 通り）。

このうち，8 回目の取り出しを終えた時点で白玉がすべて取り出されているのは，1 回目から 8 回目までに白玉が 4 個，赤玉が 4 個取り出され，9 回目と 10 回目に残りの赤玉が取り出される場合である。1 回目から 8 回目の 8 回のうち，白玉 4 個が取り出される 4 回を選ぶ選び方は ${}_8C_4$ 通りで，残りはすべて区別のできない赤玉である。

1 回目　2 回目　……　8 回目	9 回目	10 回目
赤 4 個　白 4 個	赤	赤

よって，求める場合の数は ${}_8C_4=70$（通り）

p_9 は 9 回目と 10 回目に連続して赤玉が取り出される確率である。9 回目と 10 回目に連続して赤玉が取り出されるのは，8 回目の取り出しを終えた時点で白玉がすべて取り出されている場合のみであり，その取り出し方は 70 通りである。したがって，

$$p_9=\frac{70}{210}=\frac{1}{3}$$

p_3 は 3 回目と 4 回目に連続して赤玉が取り出される確率である。3 回目と 4 回目に連続して赤玉が取り出されるのは，1，2 回目および 5 回目～10 回目までの 8 回のうち，白玉が 4 回取り出される場合で，その取り出し方は ${}_8C_4=70$（通り）である。

3 回目	4 回目	1 回目　2 回目　5 回目　……　10 回目
赤	赤	赤 4 個　白 4 個

したがって，$p_3=\dfrac{1}{3}$

(3)　4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 1 個以下であるのは次の場合

(i)　4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 1 個のみの場合

(ii)　4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 1 個も取り出されていない場合

(i)と(ii)は互いに排反である。

(i)の場合

1 回目から 4 回目までに赤玉が 1 個，白玉が 3 個取り出され，5 回目から 10 回目

までに赤玉が5個，白玉が1個取り出される場合である。

$$\underbrace{1回目\quad\cdots\cdots\quad 4回目}_{\underline{赤1個}\quad 白3個}\qquad\underbrace{5回目\quad\cdots\cdots\quad 10回目}_{赤5個\quad 白1個}$$

その取り出し方は，1回目から4回目が ${}_4C_1$ 通り，5回目から10回目が ${}_6C_1$ 通り。

したがって，4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が1個のみの場合の確率は

$$\frac{{}_4C_1\times{}_6C_1}{210}=\frac{24}{210}\left(=\frac{12}{105}\right)$$

(ii)の場合

1回目から4回目までに白玉が4個取り出され，5回目から10回目までに赤玉が6個取り出される場合である。

$$\underbrace{1回目\quad\cdots\cdots\quad 4回目}_{白4個}\qquad\underbrace{5回目\quad\cdots\cdots\quad 10回目}_{赤6個}$$

その取り出し方は $1\times1=1$ (通り)

したがって，4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が1個も取り出されていない場合の確率は $\dfrac{1}{210}$

4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が2個以上取り出されている場合は，(i)または(ii)の余事象である。よってその確率は

$$1-\left(\frac{24}{210}+\frac{1}{210}\right)=1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}$$

1回目と2回目に連続して赤玉が取り出されている(かつ4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が2個以上取り出されている)確率は，(1)より $\dfrac{1}{3}$

よって，4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が2個以上取り出されていたとき，1回目と2回目に連続して赤玉が取り出されている条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{37}{42}}=\frac{14}{37}$$

(4)　4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が2個以上取り出され，かつ9回目と10回目に連続して赤玉が取り出されるのは次の場合

(i)　4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が2個のみ取り出され，かつ9回目と10回目に連続して赤玉が取り出される場合

(ii)　4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が3個のみ取り出され，かつ9回目と10回目に連続して赤玉が取り出される場合

(iii)　4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が4個取り出され，かつ9回目と10回目に連続して赤玉が取り出される場合

(i)～(iii)は互いに排反である。

(i)の場合

1 回目から 4 回目までに赤玉が 2 個，白玉が 2 個取り出され，5 回目から 8 回目までに赤玉が 2 個，白玉が 2 個取り出され，9 回目と 10 回目に赤玉が取り出される場合である。

1 回目 …… 4 回目	5 回目 …… 8 回目	9 回目	10 回目
赤 2 個　白 2 個	赤 2 個　白 2 個	赤	赤

その取り出し方は，1 回目から 4 回目が ${}_4C_2$ 通り，5 回目から 8 回目が ${}_4C_2$ 通り。したがって，4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 2 個のみ取り出され，かつ 9 回目と 10 回目に連続して赤玉が取り出される場合の確率は

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_4C_2}{210} = \frac{36}{210}\left(= \frac{6}{35}\right)$$

(ii)の場合

1 回目から 4 回目までに赤玉が 3 個，白玉が 1 個取り出され，5 回目から 8 回目までに赤玉が 1 個，白玉が 3 個取り出され，9 回目と 10 回目に赤玉が取り出される場合である。

1 回目 …… 4 回目	5 回目 …… 8 回目	9 回目	10 回目
赤 3 個　白 1 個	赤 1 個　白 3 個	赤	赤

その取り出し方は，1 回目から 4 回目が ${}_4C_1$ 通り，5 回目から 8 回目が ${}_4C_1$ 通り。したがって，4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 3 個のみ取り出され，かつ 9 回目と 10 回目に連続して赤玉が取り出される場合の確率は

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_4C_1}{210} = \frac{16}{210}\left(= \frac{8}{105}\right)$$

(iii)の場合

1 回目から 4 回目までに赤玉が 4 個取り出され，5 回目から 8 回目までに白玉が 4 個取り出され，9 回目と 10 回目に赤玉が取り出される場合である。

1 回目 …… 4 回目	5 回目 …… 8 回目	9 回目	10 回目
赤 4 個	白 4 個	赤	赤

その取り出し方は，$1 \times 1 = 1$（通り）

したがって，4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 4 個取り出され，かつ 9 回目と 10 回目に連続して赤玉が取り出される場合の確率は

$$\frac{1}{210}$$

(i)～(iii)より，4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 2 個以上取り出され，かつ 9

回目と 10 回目に連続して赤玉が取り出される確率は

$$\frac{36}{210}+\frac{16}{210}+\frac{1}{210}=\frac{53}{210}$$

よって，4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 2 個以上取り出されていたとき，9 回目と 10 回目に連続して赤玉が取り出される条件付き確率は

$$\frac{\frac{53}{210}}{\frac{37}{42}}=\frac{53}{185}$$

(5)　9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉が取り出されるためには，印をつけた 3 個の玉のうち少なくとも 2 個は赤玉である必要がある。よって，以下の場合を考える。

(i)　つぼから赤玉 2 個と白玉 1 個を取り出して，印をつけてつぼに戻したのち，1 回目から 8 回目までに印のついた赤玉が 1 個も取り出されず，9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉が取り出される場合

(ii)　つぼから赤玉 3 個を取り出して，印をつけてつぼに戻したのち，1 回目から 8 回目までに印のついた赤玉が 1 個のみ取り出され，9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉が取り出される場合

(i)と(ii)は互いに排反である。

(i)の場合

つぼから赤玉 2 個と白玉 1 個を取り出す確率は $\frac{{}_6C_2\times{}_4C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{2}$

この 3 個の玉に印をつけてつぼに戻した後，つぼの中には印のついた赤玉が 2 個と，その他の玉が 8 個入っている。その他の玉を区別しないとすると，印のついた赤玉 2 個とその他の玉 8 個の合計 10 個の玉を取り出す場合は ${}_{10}C_2$ 通りである。

1 回目　……　10 回目

印のついた赤玉　2 個
その他の玉　8 個

また，9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉を取り出し，1 回目から 8 回目までにその他の玉を取り出す場合は $1\times1=1$（通り）である。

1 回目　……　8 回目　　9 回目　10 回目

その他の玉　8 個　　㊟赤　赤（印あり）

この場合の確率は $\frac{1}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{45}$

したがって，つぼから赤玉 2 個と白玉 1 個を取り出して，印をつけてつぼに戻し

たのち，1 回目から 8 回目までに印のついた赤玉が 1 個も取り出されず，9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉が取り出される場合の確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{45}=\frac{1}{90}$$

(ii)の場合

つぼから赤玉 3 個を取り出す確率は $\dfrac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1}{6}$

この 3 個の玉に印をつけてつぼに戻した後，つぼの中には印のついた赤玉が 3 個と，その他の玉が 7 個入っている。その他の玉を区別しないとすると，印のついた赤玉 3 個とその他の玉 7 個の合計 10 個の玉の取り出し方は ${}_{10}C_3$ 通りである。

1 回目　……　10 回目	
印のついた赤玉	3 個
その他の玉	7 個

また，9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉を取り出し，1 回目から 8 回目までに印のついた赤玉 1 個とその他の玉 7 個を取り出す場合は ${}_8C_1$ 通りである。

1 回目　……　8 回目		9 回目	10 回目
印のついた赤玉	1 個	㊍赤	赤
その他の玉	7 個	印あり	

この場合の確率は $\dfrac{{}_8C_1}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1}{15}$

　したがって，つぼから赤玉 3 個を取り出して，印をつけてつぼに戻したのち，1 回目から 8 回目までに印のついた赤玉が 1 個のみ取り出され，9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉が取り出される場合の確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{90}$$

(i)，(ii)より，9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉が取り出される確率は

$$\frac{1}{90}+\frac{1}{90}=\frac{1}{45}$$

2　袋 A：赤球 2 個，白球 1 個　　　　袋 B：赤球 3 個，白球 1 個

(1)　(i)「箱の中の 2 個の球のうち少なくとも 1 個が赤球である」事象は，「箱の中の 2 個の球がともに白球である」事象の余事象である。よって，求める確率は

$$1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$$

(ii)　箱の中から赤球が取り出されるのは，次の場合

①　袋 A から赤球，袋 B から赤球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出

す場合

この場合の確率は $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times1=\frac{1}{2}$

② 袋Ａから赤球，袋Ｂから白球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出す場合

この場合の確率は $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

③ 袋Ａから白球，袋Ｂから赤球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出す場合

この場合の確率は $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

①～③は互いに排反であるから，箱の中から赤球が取り出される確率は

$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{17}{24}$

取り出された球が赤球であり，かつそれがＢの袋に入っていたものであるのは，①において箱から取り出された赤玉がＢの袋に入っていたものである場合と，③の場合であり，その確率は $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ である。

したがって，取り出された球が赤球であったときに，それがＢの袋に入っていたものである条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{17}{24}}=\frac{9}{17}$$

(2) Ａの袋から球を２個取り出したとき

２個とも赤球である確率は $\frac{1}{{}_3C_2}=\frac{1}{3}$　　赤球と白球１個ずつである確率は $\frac{2}{3}$

Ｂの袋から球を２個取り出したとき

２個とも赤球である確率は $\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$　　赤球と白球１個ずつである確率は $\frac{1}{2}$

(i) 箱の中の４個の球のうち，ちょうど２個が赤球であるのは

Ａ，Ｂの袋からそれぞれ赤球と白球を１個ずつ取り出す場合　……①

のみである。よって，その確率は $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

箱の中の４個の球のうち，ちょうど３個が赤球であるのは

・Ａの袋から赤球を２個，Ｂの袋から赤球と白球を１個ずつ取り出す場合　……②

・Ａの袋から赤球と白球を１個ずつ，Ｂの袋から赤球を２個取り出す場合　……③

のいずれかである。よって，その確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

また，箱の中の４個の球が，４個とも赤球であるのは

A，B の袋からそれぞれ赤球を 2 個取り出す場合　……④

のみであり，その確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(ii)　箱の中から球を 2 個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は，箱の中の 4 個の球のうち

ちょうど 2 個が赤球であるとき　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{18}$

ちょうど 3 個が赤球であるとき　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

4 個とも赤球であるとき　$\dfrac{1}{6}\times 1=\dfrac{1}{6}$

したがって，箱の中から球を 2 個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は $\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{17}{36}$

また，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であり，かつそのうちの 1 個のみが B の袋(もう 1 個は A の袋)に入っていたものである確率は

①のとき　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1\times 1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{18}$　　②のとき　$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{{}_2C_1\times 1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{18}$

③のとき　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{9}$　　④のとき　$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{9}$

よって，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であり，かつそのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである確率は

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$$

したがって，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であったときに，そのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{17}{36}}=\frac{12}{17}$$